Тәжірибелік сабақ 5
Мінездемелік есептер

$R^2_{x,t}$ жазықтығында берілген

$$LU \equiv U_{tt} - a^2 U_{xx} = 0 \qquad (1)$$

біртекті ішек тербелісі теңдеуін қарастырайық. (1) теңдеуіне $x = x, y = at$ жаңа айнымаларын енгізу арқылы

$$LU \equiv U_{yy} - U_{xx} = 0 \qquad (2)$$

теңдеуін аламыз. (2) теңдеуі $x - y = const,$ $x + y = const$ екі нақты характеристикалар үйіріне ие болады.

Гурса есебі. G облысында берілген (2) теңдеуінің

$$U(x,y)\big|_{AC_1} = U(x,y)\big|_{y=x} = U(x,x) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le x_1, \qquad (3)$$

$$U(x,y)\big|_{AC_2} = U(x,y)\big|_{y=-x} = U(x,-x) = \tau(x), \quad 0 \le x \le x_2, \qquad (4)$$

шекаралық шарттарын қанағаттандыратын $C^2(G) \cap C(\overline{G})$ класында жататын классикалық шешімін табу керек.

1- қадам. Гурса есебінің шешімін табу үшін (2) теңдеуін

$$\begin{cases} \xi = x + y \\ \eta = x - y \end{cases}$$

жаңа айнымалыларын енгізу арқылы

$$U_{\xi\eta} = 0 \qquad (5)$$

теңдеуіне, яғни канондық түрге келтіреміз.

2-қадам. (5) теңдеуінің жалпы шешімі

$$U(\xi,\eta) = f(\xi) + g(\eta), \quad f, g \in C^2(R)$$

арқылы табылатындығы бізге белгілі. Осы теңдіктегі ξ, η айнымалылары орнына $x + y,\ x - y$ айнымалыларын қою арқылы $LU \equiv U_{yy} - U_{xx} = 0$

теңдеуінің

$$U(x,y) = f(x+y) + g(x-y) \qquad (6)$$

теңдігі арқылы анықталатын жалпы шешімін табамыз.

3- қадам. (3) және (4) шекаралық шарттарын пайдаланып белгісіз f және g функцияларын табамыз.

$$U(x,y)\big|_{y=x} = f(2x) + g(0) = \varphi(x), \qquad (7)$$

$$U(x,y)\big|_{y=-x} = f(0) + g(2x) = \tau(x) \qquad (8)$$

Сонымен, белгісіз f және g функцияларын анықтауға байланысты (7) және (8) теңдеулерінен құралған теңдеулер жүйесі алынды. (7) теңдеуінен x – ті $\frac{x}{2}$ алмастыру арқылы

$$f(x) = \varphi\left(\frac{x}{2}\right) - g(0) \qquad (9)$$

теңдігін, ал (8) теңдеуінен

$$g(x) = \tau\left(\frac{x}{2}\right) - f(0) \qquad (10)$$

теңдігін аламыз.

4- қадам. Табылған $f(x)$ және $g(x)$ функцияларын (6) теңдікке апарып қойып, Гурса есебінің

$$U(x,y)=\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right)+\tau\left(\frac{x-y}{2}\right)-\varphi(0) \qquad (\varphi(0)=\tau(0)=f(0)+g(0)) \qquad (11)$$

формуласымен анықталатын шешімін табамыз.

Дарбудың бірінші есебі. D облысында берілген (2) теңдеуінің

$$U(x,y)|_{AB}=U(x,y)|_{y=0}=U(x,0)=\varphi(x), \quad 0\le x\le l \qquad (12)$$

$$U(x,y)|_{AC}=U(x,y)|_{y=-x}=U(x,-x)=\gamma(x), \quad 0\le x\le l/2 \qquad (13)$$

шекаралық шарттарын қанағаттандыратын $C^{2,2}(D)\cap C(\overline{D})$ класында жататын классикалык шешімін табу керек.

Дарбудың бірінші есебінің шешімін табу үшін тағы (2) теңдеуінің (6) формуласымен анықталатын жалпы шешімін пайдаланамыз. Белгісіз f және g функцияларын (12), (13) шекаралық шарттарын қолданып табамыз.

$$U(x,y)|_{y=0}=f(x)+g(x)=\varphi(x),\ U(x,y)|_{y-x}=f(0)+g(2x)=\gamma(x)$$

Бұдан

$$g(x)=\gamma\left(\frac{x}{2}\right)-f(0), \qquad f(x)=\varphi(x)-\gamma\left(\frac{x}{2}\right)+f(0).$$

Табылған f және g функцияларының мәндерін (6) формуласына апарып қойып, Дарбудың бірінші есебінің шешімін

$$U(x,y)=\varphi(x+y)-\gamma(\frac{x+y}{2})+\gamma\left(\frac{x-y}{2}\right) \qquad (14)$$

формуласы арқылы табамыз.

Штурм-Лиувилль есебі

1) Штурм –Лиувилль есебі:

$$y''+\lambda y=0, \quad x\in[0,l] \qquad (1)$$

теңдеуінің

$$y(0)=y(l)=0 \qquad (2)$$

бірінші шекаралық шартты қанағаттандыратын нөлге тең емес болатын шешімдерге сәйкес келетін меншікті мәндерін табу керек.

Шешуі. (1.) теңдеуінің жалпы шешімінің түрі λ – параметрінің мәніне байланысты болады. Осыған байланысты үш түрлі жағдайды қарастырамыз.

а) $\lambda<0$ болсын. $\lambda=-r^2$ деп белгілейік. Онда (1) теңдеуіне сәйкес келетін $k^2-r^2=0$ характеристикалық теңдеудің әр түрлі нақты $k_1=r_1$ және $k_2=-r_2$ деген екі түбірі болады. Сондықтан дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі

$$y=c_1e^{r_1x}+c_2e^{-r_2x}$$

түрінде жазылады. Жалпы шешімге шекаралық шарттарды қойып,

$$\begin{cases} c_1+c_2=0 \\ c_1e^{rl}+c_2e^{-rl}=0 \end{cases} \qquad (3)$$

жүйесін аламыз. Бұл жүйенің анықтауышы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{rl} & e^{-rl} \end{vmatrix} = e^{rl}(e^{-2rl} - 1) \neq 0, \quad (r \neq 0)$$

нөлге тең болмағандықтан (3.) сызықты алгебралық жүйесінің тек нөлдік шешімі болады. Олай болса, $c_1 = c_2 = 0$. Демек, $\lambda < 0$ болған жағдайда берілген есептің меншікті мәндері болмайды.

б) $\lambda = 0$ болса, онда $y'' = 0$ теңдеуінің жалпы шешімі

$$y = c_1 x + c_2$$

түрінде жазылады. Жалпы шешімге шекаралық шарттарды қойып

$$\begin{cases} c_2 = 0 \\ c_1 l + c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = 0 \\ c_1 = 0 \end{cases}$$

жүйесін аламыз. Демек, бұл жағдайда берілген дифференциалдық теңдеудің тек қана нөлдік шешімі болады. Сондықтан $\lambda = 0$ саны берілген есептің меншікті мәні болмайды.

в) $\lambda > 0$ болсын. $\lambda = r^2$ деп белгілейік. Онда (1) теңдеуіне сәйкес келетін $k^2 + r^2 = 0$ характеристикалық теңдеудің бір-біріне түйіндес $k_1 = ri$ және $k_2 = -ri$ деген екі комплекс түбірі болады. Сондықтан (1) теңдеуінің жалпы шешімі

$$y = c_1 \cos rx + c_2 \sin rx$$

түрінде жазылады. Жалпы шешімге шекаралық шарттарды қойып

$$\begin{cases} c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = 0, \\ c_1 \cos rl + c_2 \sin rl = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0, \\ c_2 \sin rl = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

жүйесін аламыз. (4) жүйесінің нөлге тең емес шешімі болады тек сонда ғана, егер $\sin rl = 0$ болса. Сондықтан $rl = \pi n$, яғни

$$r_n = \frac{\pi n}{l}, \quad n \in Z,$$

$$\lambda_n = r_n^2 = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}$$

$\lambda \neq 0$ болғандықтан, n - параметірінің тек оң мәндерін алған жеткілікті. Сонымен, берілген шекаралық есептің меншікті мәндері

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2} \qquad n = 1,2,...$$

формуласы арқылы табылады. λ - параметрінің осындай мәндерінде (4) алгебралық жүйенің нөлге тең емес шешімдері бар болады және ол

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 \;\; кез-келген \;\; накты \;\; сан \end{cases}$$

жүйесі арқылы беріледі. c_1 және c_2 тұрақтыларының табылған мәндерін дифференциалдық теңдеудің жалпы шешіміне апарып қойып, берілген есептің

$$y_n = c_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \qquad n = 1,2,..$$

формуласы арқылы табылатын өзіндік функцияларын аламыз. Әлбетте c_n тұрақтысының мәні бірге тең немесе

$$\|y_n\| = 1 \Rightarrow c_n \int_0^l \sin^2 \frac{\pi n}{l} x dx = 1 \Rightarrow c_n = \sqrt{\frac{2}{l}}$$

түрінде таңдап алынады.

Тап осындай алгоритмді пайдаланып,

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y'(l) = 0 \end{cases} \qquad (5)$$

және

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y'(0) = y(l) = 0 \end{cases} \qquad (6)$$

Штурм-Лиувилль есептерінің меншікті мәндері мен өзіндік функцияларын табуға болады. Бұл есептердің де $\lambda \le 0$ болған жағдайда меншікті мәндері болмайды. $\lambda > 0$ болған жағдайда дифференциалдық теңдеулердің жалпы шешімі

$$y = c_1 \cos rx + c_2 \sin rx \qquad r = \sqrt{\lambda}$$

түрінде жазылады. Жалпы шешімге шекаралық шарттарды қойып:
а) (5) есебі үшін

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ -rc_1 \sin rl + rc_2 \cos rl = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ rc_2 \cos rl = 0 \end{cases}$$

ә) (6) есебі үшін

$$\begin{cases} rc_2 = 0 \\ c_1 \cos rl + c_2 \sin rl = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_1 \cos rl = 0 \end{cases}$$

жүйелерін аламыз.
Бұл жүйелердің нөлге тең емес шешімдері бар болады сонда және тек сонда, егер $\cos rl = 0$ болса. Сондықтан, $rl = \frac{\pi}{2} + \pi n$, яғни $n \in Z$, $r_n = \frac{\pi(2n+1)}{2l}$.

n-параметрінің теріс мәндерін қарастырмауға болады, өйткені $\lambda_n = r_n^2 > 0$. Сонымен, (6) – (6) есептерінің меншікті мәндері бірдей болады және ол

$$\lambda_n = r_n^2 = \frac{\pi^2}{4l^2}(2n+1)^2, \; n = 0,1,2,...$$

формуласы арқылы табылады. (5) есебінің өзіндік функциялары

$$y_n = \sin \frac{\pi}{2l}(2n+1)x, \quad n = 0,1,2,...,$$

ал (6) есебінің өзіндік функциялары

$$y_n = \cos \frac{\pi}{2l}(2n+1)x, \; n = 0,1,2,...$$

формулалары арқылы табылады.